Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes

Jean-Baptiste Butruille

Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes

Jean-Baptiste Butruille

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, UMR 7640 du CNRS, 91128 Palaiseau
e-mail : jbbutruille@math.polytechnique.fr

Résumé – *On démontre la conjecture de Gray et Wolf que les seules variétés strictement approximativement kähleriennes homogènes sont les espaces 3-symmétriques. Pour cela on les classifie en dimension 6 puis la démonstration pour les dimensions supérieures provient d'un théorème de Nagy, s'appuyant sur des résulats précédents de Cleyton et Swann. Les espaces homogènes de dimension 6, $S^3 \times S^3$, S^6, $\mathbb{C}P(3)$ et l'espace des drapeaux $F(1,2)$ portent une unique structure approximativement kählerienne invariante à homotétie près. Pour le premier, cela résulte de la résolution d'une équation différentielle donnée par Reyes Carrión. Pour les deux derniers, il s'agit de leur structure presque hermitienne d'espace de twisteurs sur une variété de dimension 4. Enfin, les structures approximativement kähleriennes sur la spère de dimension 6 correspondent à des 3-formes constantes sur $\mathbb{R}^7$.*

1. Introduction

Une variété approximativement kählerienne (ou Nearly Kähler, en anglais : dorénavant on note NK) est une variété presque hermitienne telle que la derivée covariante pour la connexion de Levi-Civitá de la forme de Kähler ω est antisymétrique.

Les variétés strictement approximativement kähleriennes (SNK) – c'est à dire qui ne sont pas simplement kähleriennes – en dimension 6 sont particulières à plusieurs titres. Notamment elles admettent un spineur de Killing (voir [9]) et sont d'Einstein ([7]). Depuis les travaux de Nagy dans [13] on sait que de leur classification dépend beaucoup celle des variétés NK en toute dimension.

Une voie privilégiée de construction des variétés NK est celle des espaces 3-symétriques. A. Gray a montré en 1972 que tout espace homogène 3-symétrique naturellement réductif est muni canoniquement d'une structure NK (voir [8]). Auparavant A. Gray et J.A. Wolf avaient conjecturé en 1968 dans [16] que tout espace homogène SNK est 3-symétrique. Retournant a l'intérêt manifesté dans les années 70 pour ces variétés, P.A. Nagy ([14]) a décomposé les variétés SNK de dimension quelconque en produits riemanniens d'espaces de twisteurs au-dessus de variétés Kähler-quaternioniques, d'espaces homogènes et de variétés SNK de dimension 6. Si la variété est de plus homogène, il ne reste que des espaces homogènes, de divers types mais tous 3-symétriques et des variétés SNK homogènes de dimension 6 de telle sorte qu'il suffit pour que la conjecture soit vraie qu'elle le soit en dimension 6.

Dans cet article on prouve la conjecture en classifiant totalement les variétés SNK homogènes simplement connexes de dimension 6.

Theorème 1.1. *Tous les espaces homogènes strictement NK de dimension 6 sont des espaces 3-symétriques munis de leur structure presque complexe canonique.*

Theorème 1.2. *Les seuls espaces homogènes strictement NK simplement connexes de dimension 6 sont isomorphes à G/H où G et H sont les groupes de Lie donnés dans la liste :*
- $G = S^3 \times S^3$ *et* $H = \{1\}$
- $G = G_2$ *et* H *est* $SU(3)$ *(dans ce cas* G/H *est la sphère de dimension 6) ou un de ses sous-groupes finis*
- $G = Sp(2)$ *et* $H = S^1 \times SU(2)$ *(alors* G/H *est l'espace projectif complexe* $\mathbb{C}P(3)$*) ou un de ses sous-groupes finis*
- $G = SU(3)$*,* $H = S^1 \times S^1$ *et* G/H *est l'espace de drapeaux* $F(1,2)$

De plus sur chacun de ces espaces homogènes il y a une seule structure presque complexe NK invariante à isomorphisme près.

Pour achever la classification il faudra examiner les quotients finis des espaces homogènes dont la liste est dans le théorème 1.2. En effet les variétés SNK sont compactes, de groupe fondamental fini d'après Nagy ([13]). En dimension 6 cela résultait déjà de la démonstration par Gray dans [7] qu'elles sont d'Einstein, à courbure scalaire strictement positive.

Dans la section 2, des préliminaires algébriques à la classification permettent d'établir une première liste des groupes G et H tels que leur quotient G/H est suceptible d'admettre une structure SNK invariante. Dans la section 3, on traite le cas jugé le plus difficile du produit de sphères $S^3 \times S^3$. En résolvant l'équation différentielle de Reyes Carrión [15], qui caractérise les variétés SNK en dimension 6, sur l'espace des 2-formes invariantes, on montre que $S^3 \times S^3$ admet une seule structure homogène SNK correspondant à la construction de Ledger et Obata dans [12] d'un espace 3-symétrique. Dans la section 4 on traite plusieurs cas qui se ramènent au précédent. Dans la section 5 et la section 6, le moyen de déterminer les structures presques hermitiennes invariantes de $F(1,2)$ et $\mathbb{C}P(3)$ est de décomposer la représentation linéaire isotropique en représentations irréductibles. Cette recherche apparaît liée à la théorie des espaces de twisteurs des variétés de dimension 4 (ici $\mathbb{C}P(2)$ et S^4 respectivement.) Il faut alors calculer quelles sont NK. Enfin dans la section 7, la donnée d'une structure NK de la sphère S^6 est rappelée être équivalente à la donnée d'une 3-forme générique constante sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^7$ et cela termine notre étude.

2. Préliminaires

Une variété riemannienne (M^n, g, J) est dite presque hermitienne si la métrique g et la structure presque complexe J vérifient $g(JX, JY) = g(X, Y)$ quels que soient les champs de vecteurs X et Y, donnant une reduction du fibré principal $SO(M)$ à $U(n)$, notée $U(M)$. Soit ∇ la connexion de Levi-Civitá de g, $\omega = g(J.,.)$ la forme de Kähler. Soit $\Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$ le sous-fibré des 2-formes ν de M vérifiant $\nu(JX, JY) = -\nu(X, Y)$. Le tenseur $\nabla\omega$ est une section de $T^*M \otimes \Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$. Il s'agit d'un fibré associé de $U(M)$ et on peut voir alternativement $\nabla\omega$ comme une fonction équivariante de $U(M)$ dans $V^* \otimes \Lambda^{(2,0)+(0,2)}V^*$ où V est un espace vectoriel hermitien avec $dim_{\mathbb{R}} V = n$. Or il se décompose, comme espace de représentation de $U(n)$, en quatre sous-espaces irréductibles non isomorphes, notés W_1, W_2, W_3, W_4. Selon que $\nabla\omega$ prend ses valeurs dans un des 16 sous-espaces invariants $\bigoplus_{i\in I} W_i$, $I \subset \{1,2,3,4\}$ on définit, après Gray et Hervella [8], 16 classes naturelles de variétés presque hermitiennes. En reprenant leurs notations, les variétés NK sont définies par $\nabla\omega \in W_1 = \{\nu \in V^* \otimes \Lambda^{(2,0)+(0,2)}V^* | \nu(X,Y,Z) = -\nu(Y,X,Z)\}$. Autrement dit le tenseur ∇J de type (2,1) est totalement antisymétrique. Maintenant, par l'intermédiaire de fonctions $U(n)$-équivariantes liant $\nabla\omega$ à d'autres tenseurs géométriquement significatifs de la variété, on se rend compte que, par exemple, la composante sur $W_1 \oplus W_2$ est donnée par le tenseur de Nijenhuis ou la composante sur $W_3 \oplus W_4$ par la partie de type (2,1)+(1,2) de $d\omega$. On démontre de cette façon que la structure presque complexe d'une variété NK n'est jamais intégrable à moins qu'elle soit kählerienne (i.e. avec $\nabla\omega = 0$) et que la différentielle de la forme de Kähler $d\omega$ est de type (3,0)+(0,3).

Soit $M = G/H$ un espace homogène réductif c'est à dire qu'il existe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $Ad(H)$-invariante. La projection naturelle $\pi : G \to G/H$ est une fibration principale de groupe H. La restriction de la différentielle de la projection en e est un isomorphisme $\pi_* : \mathfrak{m} \to T_oM$ où $o = \pi(e)$. Cette identification est de plus H-équivariante : $\pi_*(Ad_h u) = h_*\pi_*(u)$, $\forall\, u \in \mathfrak{m}$ (en notant encore g le difféomorphisme de M induit par la multiplication dans le groupe à gauche par $g \in G$.) Ainsi la représentation linéaire isotropique est vue comme la représentation $Ad(H)$ sur $\mathfrak{m}$. Autrement dit le fibré associé $G \times_{Ad} \mathfrak{m}/H$ est canoniquement isomorphe au fibré tangent par l'application

$$\begin{array}{rcl} G \times_{Ad} \mathfrak{m}/H & \overset{\sim}{\to} & TM \\ [g,u] & \mapsto & g_*\pi_*(u) \end{array}$$

Une section d'un espace de tenseurs de M est identifiée à une fonction H-équivariante de G sur l'espace de tenseurs correspondant de $\mathfrak{m}$, c'est à dire d'un espace vectoriel fixe. Si cette section est de plus invariante pour l'action de G sur M induite par la multiplication à gauche, la fonction est constante égale à un tenseur $Ad(H)$-invariant.

A l'intersection de ces deux notions, un espace homogène presque hermitien (M,g,J) est un espace homogène dont la métrique et la structure presque complexe sont invariantes pour l'action de G et en font une variété presque hermitienne.

Elles sont donc identifiées à un produit scalaire $(.|.)$ et un endomorphisme de carré -1 de $\mathfrak{m}$, $Ad(H)$-invariants. La dérivée covariante $\tilde{\nabla}$ d'une connexion n'est pas un tenseur, en revanche A défini par $A_X = \mathcal{L}_X - \tilde{\nabla}_X$, si. Il y a donc une correspondance bijective entre les connexions G-invariantes et les applications $\Lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$, c'est à dire vérifiant

$$(\Lambda(X)Y|Z) + (\Lambda(X)Z|Y) = 0 \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathfrak{m} \tag{1}$$

donnée par $\Lambda(X) = (-A_X)_o$, en identifiant $\mathfrak{m}$ et T_oM. Il s'agit du théorème de Wang spécialisé aux espaces homogènes réductifs (théorème 2.1, p191 de [11]). Si $\tilde{\nabla} = \nabla$, la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civitá, qui est sans torsion, on a de plus

$$\Lambda(X)Y - \Lambda(Y)X = [X, Y]_{\mathfrak{m}} \quad \text{pour tous } X, Y \in \mathfrak{m} \tag{2}$$

La notation $\mathfrak{m}$ en indice signifie la projection sur ce sous-espace du vecteur indicé. Les équations (1) et (2) définissent une unique application Λ donnée par la formule du théorème 3.3, p201 [11]

$$\Lambda(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y) \tag{3}$$

$$2(U(X, Y)|Z) = ([Z, Y]_{\mathfrak{m}}|X) + ([Z, X]_{\mathfrak{m}}|Y) \tag{4}$$

Si G est muni d'un endomorphisme σ d'ordre 3 dont H est l'ensemble des points fixes et que le produit scalaire $Ad(H)$-invariant sur $\mathfrak{m}$ représentant la métrique $(.|.)$ est de plus σ_*-invariant, en passant au quotient on obtient une isométrie θ vérifiant $\theta^3 = Id$ dont o est un point fixe isolé. En effet $\theta(\pi(g)) = \pi(g)$ implique $\sigma(g) = hg$ où $h \in H$ est une racine cubique de l'unité. Par conséquent si on est assez proche de e, $h = e$ et g doit appartenir à H. En conjuguant θ par l'action du groupe, transitive, chaque point de M est rapporté à une telle application. Cela signifie que M est un espace 3-symétrique au sens de la

Définition 2.1. *Un espace 3-symétrique est une variété M munie d'une famille d'isométries globales θ_m, $m \in M$ telles que m est un point fixe isolé de θ_m et $\forall\ m \in M$, $\theta_m^3 = Id$.*

Comme on écrit dans le plan complexe une racine cubique de l'unité, on associe à tout espace 3-symétrique une structure presque complexe dite canonique en posant

$$\forall\ m \in M \quad (\theta_m)_* = -\frac{1}{2}Id_{T_mM} + \frac{\sqrt{3}}{2}J_m$$

En notant encore J l'endomorphisme de carré -1 de $\mathfrak{m}$ associé, Gray a calculé dans [6] que

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{m}, \quad [X, JY]_{\mathfrak{m}} = -J[X, Y]_{\mathfrak{m}} \tag{5}$$

Il en a déduit

Theorème 2.2. *Soit M un espace homogène 3-symétrique. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
(i) la structure presque complexe canonique de M est NK
(ii) M est naturellement réductif

Démonstration. Par naturellement réductif on entend que la métrique satisfait

$$([X, Y]_{\mathfrak{m}}|Z) = (X|[Y, Z]_{\mathfrak{m}}) \quad \text{pour tous } X, Y, Z \in \mathfrak{m} \tag{6}$$

C'est le cas en particulier si $(.|.)$ est la restriction à $\mathfrak{m}$ d'une métrique biinvariante de G. A l'aide de (3) et (5) on peut calculer que pour tous $X, Y \in \mathfrak{m}$ $(\nabla_X J)JY =$

$2U(X,Y)+T(X,Y)$. Par conséquent (i) et (ii) sont équivalents à $U=0$. □

Réciproquement on reformule géométriquement la conjecture de Gray et Wolf, énoncée dans [16] (à la fin, p113 ou dans l'introduction, p79) dans le langage de la théorie des groupes de Lie :

Conjecture 2.3. *Tout espace homogène SNK est un espace 3-symétrique naturellement réductif muni de sa structure presque complexe canonique.*

Désormais $M=G/H$ désigne un espace homogène réductif simplement connexe de dimension 6. On cherche à quelles conditions il admet une structure presque hermitienne NK. Or

Proposition 2.4. *Soit $M=G/H$ un espace homogène riemannien de dimension 6, non isométrique à la sphère standard S^6. S'il admet une structure presque complexe NK, elle est unique et invariante pour l'action du groupe G.*

Démonstration. L'exposé ci-dessous suit le livre [2], surtout les section 5.2 et 5.3.

En dimension 6, les variétés NK ont sont caractérisées par l'existence d'un spineur de Killing : si on note ΣM le fibré des spineurs complexes, il existe $\psi\in\Gamma(\Sigma M)$, $\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que

$$\nabla_X\psi=\beta X.\psi$$

en notant encore ∇ la connexion induite sur $\Gamma(\Sigma)$ par la connexion de Levi-Civitá. Quant au point, il désigne la multiplication de Clifford. Comme on est en dimension paire on peut scinder ψ en une part négative $\psi^-\in\Sigma^-M$ et une part positive $\psi^+\in\Sigma^+M$ suivant la décomposition en sous-espaces irréductibles de la représentation de Spin(6). Alors

$$\begin{aligned}\nabla_X\psi^+ &= \beta X.\psi^-\\ \nabla_X\psi^- &= \beta X.\psi^+\end{aligned}$$

si bien que le conjugué de ψ, $\overline{\psi}=\psi^+-\psi^-$ est encore un spineur de Killing :

$$\nabla_X\overline{\psi}=-\beta X.\overline{\psi}$$

De plus β et $-\beta$ sont les seules valeurs possibles car il faut que la courbure scalaire vaille $s=4\beta^2n(n-1)$, où $n=6$ est la dimension de M. On définit alors la structure presque complexe J associée à ψ par

$$JX.\psi^+\overset{def}{=}iX.\psi^+ \tag{7}$$

après avoir vérifié que l'ensemble $\{X.\psi_x^+|X\in T_xM\}$ est un sous-espace complexe de Σ_x^+M en tout point $x\in M$. A présent si M n'est pas la sphère S^6, l'ensemble des spineurs de Killing pour la valeur β est de dimension 1 (proposition 1, p126) et la structure presque complexe associée est NK. Inversement si on se donne une structure presque complexe NK, J sur M, il existe un spineur de Killing tel qu'elle en soit la structure presque complexe associée (voir [9]). On en déduit qu'il y a une seule structure presque complexe NK sur M. De plus on peut définir une action du groupe d'isométrie sur les spineurs. Pour un espace homogène, les spineurs de Killing sont invariants et par conséquent J aussi, par (7). □

Ainsi, tout espace homogène riemannien de dimension 6 hormis la sphère S^6, muni d'une structure presque complexe NK est un espace homogène presque hermitien.

Dans l'examen de la conjecture en dimension 6 on distingue deux types d'espaces homogènes. Les cas où G et H sont des groupes produits des sphères S^1 et S^3. On veut démontrer qu'ils se ramènent tous au cas de $S^3 \times S^3$ c'est à dire, comme on le verra à la section suivante, que la variété admet au plus une structure SNK homogène qui est de plus 3-symétrique comme on souhaite. Et les cas exceptionnels de l'espace des drapeaux $F(1,2)$, de l'espace projectif $\mathbb{C}P(3)$ et de la sphère S^6 qu'on sait admettre eux aussi une telle structure et on voudrait démontrer en examinant la représentation linéaire isotropique de H qu'il n'y en n'a pas d'autre.

Une telle démarche est systématique :

Proposition 2.5. *Soit G/H un espace homogène SNK de dimension 6. Le groupe H est contenu dans $SU(3)$.*

Démonstration. D'abord $M = G/H$ est un espace homogène presque hermitien, $\mathfrak{m}$ est muni d'un endomorphisme de carré -1 et on le voit comme un espace vectoriel complexe de dimension 3. Alors $Ad(H) \subset U(\mathfrak{m})$, le groupe des transformations unitaires de $\mathfrak{m}$, exprimant que la métrique et la structure presque complexe sont invariantes, ce qui s'écrit encore $g^\star\omega = \omega$, où ω est la forme de Kähler. Puis

$$g^\star d\omega = d(g^\star\omega) = d\omega$$

Or pour une variété SNK de dimension 6, $d\omega$ est non nulle, de type $(3,0)+(0,3)$, $Ad(H)$ préserve aussi dans ce cas une 3-forme complexe sur $\mathfrak{m}$ et doit finalement être contenu dans $SU(\mathfrak{m})$. □

Celui-ci étant compact, de dimension 8, les seuls groupes qui conviennent, hormis lui-même, sont $U(1) = S^1$, $SU(2) = Sp_1 = S^3$ et leurs produits directs et leurs quotients finis.

Pour un espace homogène on a la suite d'homotopie

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to H/H^0 \to 0 \tag{8}$$

Cela implique que le rang du groupe fondamental de G doit être inférieur ou égal à celui du groupe fondamental de H. Et si on suppose G connexe, H l'est aussi.

A partir de ces considérations on peut établir une liste des groupes H possibles et la liste, en regard, des couples (G,H), compatible avec ces faits. Il nous reviendra d'examiner cas par cas à partir de cette liste ce que l'existence de cette application surjective

$$\phi : \pi_1(H) \to \pi_1(G) \tag{9}$$

impose plus précisement au plongement de H dans G. Pour éviter de citer tous les quotients finis d'un groupe on écrit seulement la liste des algèbres de Lie :

Lemme 2.6. *Soient G/H un espace homogène SNK simplement connexe de dimension 6 et soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H, respectivement. Elles apparaissent à la même ligne du tableau ci-dessous :*

dim $\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}$
0	$\{0\}$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
1	$i\mathbb{R}$	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
2	$i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$	$i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(3)$
3	$\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$
4	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$	$i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{sp}(2)$
8	$\mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{g}_2$

Démonstration. Cette liste est établie, en commençant par $\mathfrak{h}$ jusqu'à $\mathfrak{su}(3)$ qui doit la contenir à cause de la proposition 2.5, à partir de la liste par ordre de dimension croissante des groupes simples, compacts, connexes : $S^3 \simeq SU(2) \simeq Sp(1)$, $SU(3)$, $Spin(5) \simeq Sp(2)$, G_2, etc. Le dernier groupe cité est de dimension 14 car $SU(3)$ est de dimension 8 et G/H de dimension 6.

Outre les raisons de dimension qui peuvent l'empêcher, on se demande quelles $\mathfrak{h}$ sont vraiment des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{su}(3)$. C'est bien sûr le cas de $i\mathbb{R}$, $\mathfrak{su}(2)$ et $i\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$. C'est encore le cas de $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ via le plongement

$$\begin{array}{rcl} i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) & \to & \mathfrak{su}(3) \\ ix + A & \mapsto & \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & A - ixI_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

où A est une matrice 2×2 antihermitienne à trace nulle. En revanche ce n'est plus le cas de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. En effet à partir d'une application $\varphi : \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(3)$, non identiquement nulle, en restreignant à chaque facteur on obtient deux représentations complexes ρ_1, ρ_2 de $\mathfrak{su}(2)$ de dimension 3 qui commutent. Alors de deux choses l'une : ou bien une représentation est irréductible et la seconde est triviale, par le lemme de Schur. Ou bien il existe pour chacune un sous-espace de de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 invariants, orthogonaux. Cette décomposition est la même pour ρ_1 et ρ_2 car elles commutent et les deux représentations sont nulles sur le premier espace car $\mathfrak{su}(2)$ n'admet pas de représentation autre que triviale avant la dimension 2. Par conséquent φ est le prolongement par zéro d'une application $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$. Dans ce cas, comme dans le précédent, elle ne saurait être un plongement. Enfin $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ et toutes les algèbres qui le contiennent (en premier $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$) ne peuvent pas être plongées dans $\mathfrak{su}(3)$ car les sous-algèbres de Cartan de celle-ci sont de dimension 2. □

Si G n'est pas simplement connexe, soit $\pi : \tilde{G} \to G$ son revêtement universel et H' le sous-groupe de $\tilde{G}$, $\pi^{-1}(H)$. Alors

Lemme 2.7. *Les deux espaces homogènes $M = G/H$ et $M' = \tilde{G}/H'$ sont isomorphes.*

Démonstration. L'isomorphisme est donné par

$$\begin{array}{rcl} M' & \to & M \\ [g] & \mapsto & [\pi(g)] \end{array}$$

qui est bien définie et injective car g et g' définissent la même classe, $g'g^{-1} \in H'$, si et seulement si $\pi(g')\pi(g)^{-1} \in H$, c'est à dire $\pi(g)$, $\pi(g')$ définissent la même classe de M. Elle est aussi surjective car π l'est. □

Si le groupe fondamental de G est fini, $\tilde{G}$ et H' sont encore compactes, l'algèbre de Lie de H', $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ est encore incluse dans $\mathfrak{su}(3)$ et bien sûr l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$ est $\mathfrak{g}$. Dans la suite on supposera donc que G est simplement connexe (sections 3, 5, 6, 7) ou G et H sont des produits finis des groupes S^1 et S^3 ou des quotients finis de ces produits (section 4). Dans le premier cas, comme les groupes sont connexes, la représentation linéaire isotropique de M, $Ad(H)$, est donnée par la représentation de l'algèbre de Lie, $ad(\mathfrak{h})$, sur le supplémentaire invariant choisi. On peut donc finalement se contenter de chercher les structures presque hermitiennes invariantes des espaces G/H où G et H sont les groupes simples, compacts, connexes, dont les algèbres de Lie apparaissent à une même ligne du tableau 2.6.

3. Le groupe de Lie $S^3 \times S^3$

On se propose ici de chercher toutes les structures NK sur le groupe de Lie $S^3 \times S^3$, invariantes à gauche. On en connait d'avance une, correspondant à la construction de Ledger et Obata (voir [12]).

Si G est un groupe de Lie compact, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, g une métrique biinvariante sur G, on appelle Δ le sous-groupe diagonal, isomorphe a G, de de $G \times G \times G$. L'espace homogène $M = G \times G \times G/\Delta$ est isomorphe à $G \times G$ et on choisit l'identification concrète

$$\begin{array}{rcl} G \times G \times G/\Delta & \to & G \times G \\ [x, y, 1] & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

où $[x, y, 1]$ désigne la classe de $(x, y, 1)$. Toute classe contient un triplet de cette forme donc l'application est bien définie. On choisit alors pour supplémentaire $Ad(H)$-invariant de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de Δ dans $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ formé des vecteurs à composante tangente au *premier* facteur nulle de telle sorte que la restriction de $g \times g \times g$ à $\mathfrak{m}$ donne une métrique sur M qui n'est pas la métrique produit de $G \times G$ mais le rend naturellement réductif. Maintenant la permutation circulaire de $G \times G \times G$ est un automorphisme d'ordre 3 qui induit une structure d'espace 3-symétrique sur M et, finalement, une structure NK.

Lorsque $G = SU(2) \simeq S^3$, si on joint deux bases orthonormées de $\mathfrak{g}$ et qu'on prolonge par invariance à gauche, on obtient un repère sur M non orthonormé mais dans le co-repère associé $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ duquel la forme de Kähler s'écrit

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}(e_1 \wedge f_1 + e_2 \wedge f_2 + e_3 \wedge f_3) \tag{10}$$

Notre but est de démontrer que la structure SNK ainsi décrite sur $S^3 \times S^3$ est la seule (bien sûr cela dépend de la métrique biinvariante choisie, mais comme $SU(2)$ est simple elles sont toutes proportionnelles) :

Proposition 3.1. *Soit (g, J) une structure presque hermitienne invariante telle que $(S^3 \times S^3, g, J)$ est SNK. Elle est isomorphe, en tant qu'espace homogène presque hermitien, à la construction de Ledger et Obata. En particulier elle est 3-symétrique.*

Définition 3.2. *Étant donné un co-repère $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de $S^3 \times S^3$, on appelle 2-forme canonique, la forme donnée en (10).*

Les variétés SNK de dimension 6 sont caracterisées par la vérification par la forme de Kähler d'une équation différentielle donnée par Reyes Carrión au théorème 4.9 page 48 de [15] (pour une présentation et une demonstration différentes du même fait voir aussi [10].)

$$-2\lambda\omega \wedge \omega = d\hat{\rho} \tag{11}$$

où λ est une constante réelle, ρ est proportionnelle à la différentielle de ω et quelle que soit la 3-forme α de type $(3,0)+(0,3)$, $\hat{\alpha}$ est l'unique 3-forme telle que $\alpha + i\hat{\alpha}$ est une 3-forme volume complexe. Plus précisement on notera

$$d\omega = 3\lambda\rho \tag{12}$$

Dès lors on cherche des 2-formes invariantes sur $S^3 \times S^3$ vérifiant (11) ou encore des triplets (ω, ρ, λ) vérifiant (11) et (12).

Pour faciliter les calculs on introduit un repère approprié dans lequel l'expression de la forme de Kähler est proche de celle de la 2-forme canonique.

Sur la sphère S^3 il existe un repère global (X_1, X_2, X_3) privilégié, invariant à gauche et vérifiant

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 2X_3 \\ [X_2, X_3] &= 2X_1 \\ [X_3, X_1] &= 2X_2 \end{aligned}$$

En prenant la base duale de l'espace cotangent en chaque point on obtient un repère des 1-formes (e_1, e_2, e_3) tel que

$$de_i = e_{i+1} \wedge e_{i+2} \tag{13}$$

en notant les indices dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On remarque que n'importe quel co-repère obtenu a partir d'un tel repère par une isométrie directe a encore la propriété (13).

Définition 3.3. *On appelle co-repère circulaire un co-repère $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ de $S^3 \times S^3$ tel que les trois premières (resp. les trois dernières) formes sont nulles en chaque point sur l'espace tangent a la fibre du second (resp. du premier) facteur passant par ce point et vérifient (13).*

C'est dans un tel repère que les calculs seront faits.

Lemme 3.4. *Dans un co-repère circulaire* $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$*, la forme de Kälher d'une variéte NK s'écrit seulement comme combinaison linéaire de termes « mixtes »* $e_i \wedge f_j$ $i, j = 1, 2, 3$

Démonstration. On écrit pour l'instant en toute généralité

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i e_{i+1} \wedge e_{i+2} + \sum_{i=1}^{3} b_i f_{i+1} \wedge f_{i+2} + \sum_{i,j=1}^{3} c_{i,j} e_i \wedge f_j$$

Que les coefficients soient des constantes, non des fonctions sur la variété, traduit l'invariance de ω. Puis, en exprimant seulement que la forme est non dégenerée, soit $\omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$, on obtient d'abord

$$^tACB + det\ C \neq 0$$

où A est le vecteur colonne des $a_i,\ i = 1, 2, 3$, B le vecteur colonne des b_i et C la matrice des $c_{i,j}$. Mais pour une variété NK, $d\omega$ est une 3-forme de type $(3, 0) + (0, 3)$. Comme ω est elle-même de type $(1, 1)$, on ne peut qu'avoir que

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{14}$$

c'est à dire que $\omega \wedge \omega$ est fermée. En fait elle est même exacte par (11). Cela conduit à

$$^tCA = 0 \quad \text{et} \quad CB = 0$$

puis à

$$^tACB = 0$$

Finalement $det\ C \neq 0$, c'est à dire C et ^tC sont inversibles et il faut $A = B = 0$. □

Remarquons que l'énoncé est toujours valide si on remplace "NK" par "semi-kählerienne".

On peut même mieux choisir sa base pour que C soit diagonale :

Lemme 3.5. *Il existe un co-repère circulaire* $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ *tel que*

$$\omega = \lambda_1\, e_1 \wedge f_1 + \lambda_2\, e_2 \wedge f_2 + \lambda_3\, e_3 \wedge f_3 \tag{15}$$

où les λ_i $i = 1, 2, 3$ *sont des constantes réelles non nulles.*

Démonstration. Soient M, N deux matrices de $SO(3)$. Partant d'un co-repère circulaire $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ on lui associe le co-repère obtenu en appliquant sur chaque espace tangent aux 3 premières formes la matrice de changement de base M et aux 3 dernières la matrice N. Comme remarqué précédemment, c'est encore un co-repère circulaire (cela revient à appliquer sur chaque facteur du produit une isométrie directe de la métrique biinvariante de $SU(2)$.) Alors si ω s'écrivait dans l'ancien co-repère grâce à la matrice C, son expression dans le nouveau fait intervenir la matrice MC^tN. En écrivant C comme produit d'une matrice symétrique (donc diagonalisable par un changement de base orthonormée) et d'une matrice orthogonale on voit qu'on peut choisir M et N telles qu'elle soit diagonale. □

A partir seulement de la forme de Kähler d'une variété SNK, on peut retrouver la structure presque complexe, puis la métrique.

Proposition 3.6. *Soit une variété presque hermitienne de dimension 6, (M, g, J) munie d'une d'une 3-forme ρ de type $(3,0)+(0,3)$. Il existe une constante positive c telle que*

$$\iota(v)\rho \wedge \rho = c\ \iota(Jv)vol \tag{16}$$

où vol désigne la forme volume de g.

Démonstration. Soit $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ un repère de M adapté à sa structure presque hermitienne : orthonormé et tel que $Jv_{2i} = v_{2i+1}$ pour tout $i = 0, 1, 2$. Autrement dit si $(l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$ est le repère « dual » des 1-formes, la forme de Kähler est

$$\omega = l_0 \wedge l_1 + l_2 \wedge l_3 + l_4 \wedge l_5$$

La forme volume est $vol = l_0 \wedge l_1 \wedge l_2 \wedge l_3 \wedge l_4 \wedge l_5$. Maintenant $\Lambda^{3,0}$ est de dimension complexe 1 donc il existe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que ρ est la partie réelle de $z(l_0 + il_1) \wedge (l_2 + il_3) \wedge (l_4 + il_5)$:

$$\begin{aligned}\rho &= a(l_0 \wedge l_2 \wedge l_4 - l_1 \wedge l_3 \wedge l_4 - l_0 \wedge l_3 \wedge l_5 - l_1 \wedge l_2 \wedge l_5) \\ &\quad -b(l_0 \wedge l_2 \wedge l_5 + l_0 \wedge l_3 \wedge l_4 - l_1 \wedge l_3 \wedge l_5 + l_1 \wedge l_2 \wedge l_4)\end{aligned}$$

Le stabilisateur en chaque point d'une telle 3-forme est $SL(3, \mathbb{C})$. Il agit transitivement sur les vecteurs et préserve (16). Il suffit alors de vérifier

$$\iota(l_0)\rho = a(l_2 \wedge l_4 - l_3 \wedge l_5) - b(l_2 \wedge l_5 + l_3 \wedge l_4)$$

puis

$$\iota(l_0)\rho \wedge \rho = 2(a^2 + b^2)\iota(l_1)vol$$

□

Cette expression intrinsèque de J permet de le calculer dans n'importe quel repère : soit $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ le repère associé à un co-repère circulaire $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ dans lequel la forme de Kähler s'écrit (15). Appelons, en reprenant les notations de Hitchin dans l'article [10], K_ρ l'application linéaire de TM dans $TM \otimes \Lambda^6 T^*M$ définie par

$$K_\rho(v) = \iota(v)\rho \wedge \rho$$

en identifiant $\Lambda^5 T^*M$ et $TM \otimes \Lambda^6 T^*M$, par l'intermédiaire du produit extérieur. On différentie l'expression (15) de ω grâce aux formules (13). On trouve

$$K_{d\omega}(X_1) = \big((\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)X_1 - 2\lambda_2\lambda_3 Y_1\big) \otimes s \tag{17}$$

où $s = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$. Pour calculer la constante c on se sert du fait que $J^2 = -Id$. En appliquant $K_{d\omega}$ une nouvelle fois à la partie vectorielle de l'expression (17) ci-dessus, on trouve

$$c = \frac{1}{3\lambda}\sqrt{-\lambda_1^4 - \lambda_2^4 - \lambda_3^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2\lambda_1^2\lambda_3^2}$$

Dans cette base, J admet donc la matrice

$$\begin{pmatrix} D & E \\ -E & -D \end{pmatrix}$$

avec

$$D = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

et

$$E = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -2\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

On progresse : il est maintenant possible de calculer $\hat{\rho}$ sans passer par la métrique, ce qui va nous permettre de résoudre l'équation différentielle (11). Quels que soient les champs de vecteurs X, Y, Z sur M on a

$$\hat{\rho}(X,Y,Z) = -\rho(JX,JY,JZ) = \rho(JX,Y,Z)$$

Lemme 3.7. *Soit $(S^3\times S^3, \omega, J)$ une variété NK et soit $(e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3)$ un co-repère circulaire tel que ω s'écrit (15). Alors (11) est équivalente à*

$$k\frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i(\lambda_i^2-\lambda_{i+1}^2-\lambda_{i+2}^2) \quad \forall i=1,2,3 \tag{18}$$

avec

$$k = \frac{6\lambda^2 det\ C}{c} \tag{19}$$

Démonstration. Soit $(e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3)$ un co-repère circulaire dans lequel ω s'écrit, comme démontré au lemme 3.4, $\sum c_{i,j}\, e_i \wedge f_j$ et tel que J est représenté dans le repère associé par la matrice

$$\begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$$

On a

$$\hat{d\omega}(e_{i+1},e_{i+2},f_j) = (C^tD)_{i,j}$$

$$\hat{d\omega}(e_i,f_{j+1},f_{j+2}) = (GC)_{i,j}$$

puis

$$3\lambda\, d\hat{\rho} = \sum_{i,j=1}^{3}(C^tD+GC)_{i,j}\ e_{i+1}\wedge e_{i+2}\wedge f_{i+1}\wedge f_{i+2}$$

Quant au calcul de $\omega\wedge\omega$ il fait apparaître les mineurs d'ordre 2 de C, c'est à dire son inverse. L'équation caractéristique (11) s'écrit alors

$$2k'\,{}^tC^{-1} = C^tD + GC$$

avec

$$k' = 6\lambda^2 det\ C \tag{20}$$

Ce n'est rien d'autre que (18), en tenant compte de nos simplifications successives. $\square$

On résoud facilement (18). Premièrement notons que si tous les λ_i sont égaux ou même seulement de signes différents les trois équations sont vérifiées à la fois pour $k = \lambda_1^4 = \lambda_2^4 = \lambda_3^4$. Autrement si on note $S = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ les λ_i^2 doivent d'abord tous vérifier la même équation du second ordre

$$2x^2 - Sx - k' = 0$$

Puis supposons que λ_1^2 et λ_2^2 soient deux racines distinctes et, par exemple, $\lambda_3^2 = \lambda_2^2$. Alors $\lambda_1^2\lambda_2^2$ vaut le produit des racines : $-\frac{k}{2}$ et l'équation (18), $i = 2$ implique $k = 0$, ce qui signifierait que ω est dégénérée. Par conséquent toutes les valeurs diagonales sont égales au signe près.

Il reste à trancher cette ambiguïté. On le fait en introduisant pour la première fois la métrique, en demandant qu'elle soit positive.

Remarquons premièrement que les cas où les trois signes sont positifs ou où seulement un signe sur trois l'est sont identiques, à une rotation d'angle π près. De même les deux cas restant.

Effectivement, si on étudie la forme quadratique $X \mapsto \omega(JX, X)$, on voit qu'elle est soit définie positive si le déterminant de C est positif, soit définie négative dans le cas contraire.

Proposition 3.8. *Soit ω une 2-forme différentielle sur $S^3 \times S^3$ vérifiant l'équation différentielle (11). Il existe un co-repère circulaire tel que ω est un multiple de la 2-forme canonique. Il est strictement positif si et seulement si ω représente une variété riemannienne NK.*

Démonstration. Pour tout i dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\omega(Je_i, e_1) = -\frac{2}{c}\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\,\omega(f_1, e_1) = \frac{2}{c}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$\omega(Je_i, f_i) = \frac{1}{c}\lambda_i(\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2 - \lambda_{i+2}^2)$$

La forme quadratique $X \mapsto \omega(JX, X)$ est la somme de trois formes quadratiques de degré 2,

$$q_i = \frac{2\lambda_i}{c}\big(\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}x_i^2 - (\lambda_i^2 - \lambda_{i+1}^2 - \lambda_{i+2}^2)x_iy_i + \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}y_i^2\big), \quad i = 1, 2, 3$$

dont le discriminant est c^2, positif, et les coefficients des termes carrés ont le signe de $det\ C$. $\square$

Ceci achève en même temps la preuve de la proposition 3.1.

4. Espaces homogènes quotients de groupes produits des sphères

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un couple d'algèbres de Lie admis dans la liste du lemme 2.6. On cherche les plongements de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. En travaillant avec les algèbres de Lie on écarte provisoirement la question des quotients finis des groupes. Cependant si G est de la forme $(S^1)^p \times G'/\Gamma$ et $H = (S^1)^q \times H'/\Sigma$ où Γ et Σ sont des groupes finis et G' et H' sont simplement connexes, on retient que la surjectivité de ϕ vue en (9) implique premièrement $p \leq q$, deuxièmement que le morphisme de groupe obtenu en restreignant au facteur $(S^1)^p$ de H et en projetant dans G sur le facteur $(S^1)^q$ est lui-même surjectif. Au niveau des algèbres de Lie cela se traduit, en notant p la projection sur $\bigoplus i\mathbb{R}$, parallèlement à $\bigoplus \mathfrak{su}(2)$, par

$$\mathfrak{h} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \bigoplus i\mathbb{R} \quad \text{est surjectif} \tag{21}$$

Dans cette section on s'intéresse aux espaces homogènes G/H où G et H sont des produits directs de S^1 et S^3 ou des quotients finis de ces produits. Par conséquent $\mathfrak{h}$ doit être $i\mathbb{R}$, $i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathfrak{su}(2)$ ou $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ et d'après le lemme 2.6 on a toujours $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Cependant on ignore encore si $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ aparaissant dans cette décomposition est $Ad(H)$-invariant.

Proposition 4.1. *Soit $M = G/H$ un espace homogène NK simplement connexe de dimension 6 avec $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sommes directes d'algèbres de Lie isomorphes à $i\mathbb{R}$ ou $\mathfrak{su}(2)$. Alors $\mathfrak{h}$ admet pour supplémentaire dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{m}$ isomorphe à $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ et M est isomorphe à $S^3 \times S^3$ muni de son unique structure NK 3-symétrique invariante.*

Démonstration. Un idéal est bien sûr en particulier $ad(\mathfrak{h})$-invariant et même $Ad(H)$-invariant puisque H est connexe. Considérons chaque cas :

– $\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R}$

D'après (21), $\varphi \circ p$ est surjectif, c'est à dire dans ce cas bijectif. L'intersection du plongement de $\mathfrak{h}$ avec le noyau de la projection est $\varphi(\mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)) = \{0\}$ et ce dernier est par conséquent toujours un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, quel que soit précisément le plongement.

– $\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$

De même ici $\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ convient.

– $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$

En projetant sur chaque facteur $\mathfrak{su}(2)$ de $\mathfrak{g}$ on obtient un endomorphisme de $\mathfrak{su}(2)$, soit une représentation unitaire de dimension 2 de $\mathfrak{su}(2)$. Or $\mathfrak{su}(2)$ n'a qu'une seule représentation irréductible complexe en chaque dimension. En dimension 2 on ne peut donc avoir que l'identité de $\mathfrak{su}(2)$ ou la représentation triviale. Si les trois représentations étaient triviales ce ne serait pas un plongement. Il y a donc au moins un facteur $\mathfrak{su}(2)$ tel que la projection q vérifie comme plus haut : $\varphi \circ q$ est surjectif et on prend $\mathfrak{m}$ égal au noyau de q : la somme des deux autres. C'est encore un idéal.

– $\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$

Cela résulte de la combinaison des deux arguments précédents pour les facteurs $i\mathbb{R}$ et $\mathfrak{su}(2)$, respectivement, de $\mathfrak{g}$.

Un idéal est même une sous-algèbre de Lie. La variété étant simplement connexe est isomorphe à $S^3 \times S^3$. De plus puisque $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, on peut toujours le munir de l'unique (à multiple près) 2-forme ω susceptible de représenter une structure NK invariante d'après les résultats de la section 3. Mais ici H n'est plus trivial et il faut que ω soit $Ad(H)$-invariante pour le plongement précis de H choisi. Par construction, c'est le cas dès que $Ad(H)$ est inclus dans le sous-groupe diagonal. C'est de plus une condition nécessaire, $Ad(H)$ agissant séparément sur chaque facteur de la somme. Les seules possibilités pour H sont finalement les sous-groupes de S^3 : $\{1\}$, S^1 et les quotients finis de S^3. En effet un espace homogène qu'on écrit $M = G/H$ peut toujours s'écrire différemment $M = G'/H'$ où G' est un sous-groupe d'isométries plus petit que G mais agissant toujours transitivement et H' le sous-groupe d'isotropie *dans* G'.

□

5. L'espace des drapeaux

L'espace des drapeaux $F(1,2)$ d'un espace vectoriel hermitien E de dimension 3 est l'espace des couples (l,p) où l est une droite de E et p un plan contenant cette droite. Il apparaît naturellement dans notre liste comme $SU(3)/S^1 \times S^1$ mais on peut aussi l'écrire $U(3)/U(1) \times U(1) \times U(1)$: un point (l,p) est autrement défini par une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) telle que $l = \mathbb{C}e_1$ et (e_1, e_2) est une base orthonormée de p ; l'action naturelle de $U(3)$ sur E induit une action sur les drapeaux dont le groupe d'isotropie en un point (l,p) est formé d'endomorphismes qui préservent les trois droites complexes $\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2, \mathbb{C}e_3$, c'est à dire d'endorphismes diagonaux dans la base (e_1, e_2, e_3). De façon équivalente il existe trois fibrations $F(1,2) \to \mathbb{C}P(2)$ à fibres isométriques à $\mathbb{C}P(1)$. Sur la fibre de la première c'est la droite qui varie dans le plan, sur celle de la seconde c'est le plan autour de la droite et sur la fibre de la troisième, la deuxième droite du plan, $\mathbb{C}e_2$, est fixe et la droite l varie dans le plan orthogonal et le plan p avec elle autour de e_2. En fait chacune de ces fibrations est la fibration d'un espace de twisteurs au-dessus d'une variété de dimension 4. Cela permet que $F(1,2)$ soit muni naturellement de trois structures kähleriennes puis, par variation canonique de la submersion riemannienne, d'une structure NK (voir [14] pour la construction d'une variété NK à partir d'une submersion kählerienne générale, [2] pour les espaces de twisteurs NK.) Pour chercher toutes les structures NK de $F(1,2)$ on ne privilégie aucune fibration ou aucune direction complexe associée à un point de l'espace de drapeaux, on regarde la représentation complexe $Ad(H)$ de $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ associée au plongement naturel dans $G = U(3)$. Tous les plongements de H dans G sont conjugués et induisent le même espace homogène G/H en fin de compte car leur image est un tore maximal. On choisit un supplémentaire $\mathfrak{m}$, $Ad(H)$ invariant.

Lemme 5.1. *L'espace des métriques invariantes presque hermitiennes de* $F(1,2)$ *est de dimension 3*

Démonstration. La représentation complexe $Ad(H)$ sur $\mathfrak{m}$ (ou la représentation linéaire isotropique) est réductible : elle se décompose en une somme de trois représentations irréductibles. En effet si on représente habituellement $U(3)$ par les matrices unitaires et le sous-groupe $H = S^1 \times S^1 \times S^1$ par les matrices diagonales, $\mathfrak{u}(3)$ est l'ensemble des matrices anti-hermitiennes et l'ensemble $\mathfrak{k}$ des matrices avec des zéros sur la diagonale est un supplémentaire évident de $\mathfrak{h}$. Or il est $Ad(H)$-invariant. En fait si on note

$$\forall\, a,b,c \in \mathbb{C} \quad \langle a,b,c\rangle \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\overline{a} & 0 & c \\ -\overline{b} & -\overline{c} & 0 \end{pmatrix}$$

(22) $$Ad_h\langle a,b,c\rangle = \langle e^{i(t-s)}a, e^{i(t-r)}b, e^{i(s-r)}c\rangle \quad \text{où } h = \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \in H$$

On le scinde en trois sous-espaces invariants :

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \{\langle a,0,0\rangle \mid a \in \mathbb{C}\} \\ \mathfrak{m} &= \{\langle 0,b,0\rangle \mid b \in \mathbb{C}\} \\ \text{et} \quad \mathfrak{n} &= \{\langle 0,0,c\rangle \mid c \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

On voit par (22) que

(23) $$[\mathfrak{h},\mathfrak{l}] = \mathfrak{l}, \ [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] = \mathfrak{m}, \ [\mathfrak{h},\mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$$

La représentation $Ad(H)$ restreinte à $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{n}$ est irréductible et l'espace des produits scalaires $Ad(H)$-invariants de $\mathfrak{k}$ ou de façon équivalente l'espace des métriques invariantes de $F(1,2)$ est de dimension 3. □

De plus on peut calculer

$$\begin{aligned} [\langle a,0,0\rangle, \langle 0,b,0\rangle] &= \langle 0,0,-\overline{a}b\rangle \\ [\langle a,0,0\rangle, \langle 0,0,c\rangle] &= \langle 0,ac,0\rangle \\ [\langle 0,b,0\rangle, \langle 0,0,c\rangle] &= \langle -b\overline{c},0,0\rangle \end{aligned}$$

et

$$[\langle a,0,0\rangle, \langle a',0,0\rangle] = \begin{pmatrix} iz & 0 & 0 \\ 0 & -iz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } z = 2Im(\overline{a}a')$$

et de même pour $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ si bien que

(24) $$[\mathfrak{l},\mathfrak{l}] \subset \mathfrak{h}, \ [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}, \ [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}$$

(25) $$[\mathfrak{l},\mathfrak{m}] = \mathfrak{n}, \ [\mathfrak{m},\mathfrak{n}] = \mathfrak{l}, \ [\mathfrak{n},\mathfrak{l}] = \mathfrak{m}$$

Ces relations sont compatibles avec celles calculées par les auteurs de [2] p141 où notre « $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ » est noté « $\mathfrak{m}$ ». On considère comme eux le produit scalaire sur $\mathfrak{u}(3)$ donné par :

$$\langle X|Y\rangle = -\frac{1}{2}Re(tr(XY))$$

Les trois sous-espaces invariants sont deux à deux orthogonaux, on peut donc appliquer une homotétie dans chacun et obtenir encore une métrique invariante. En fait on les obtient toutes de cette façon. On note g la métrique invariante associée aux coefficients d'homotétie $r, s, t \in]0; +\infty[$ c'est à dire au produit scalaire

$$(.|.) = r\langle .|.\rangle|_{\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}} + s\langle .|.\rangle|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}} + t\langle .|.\rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$$

C'est la métrique d'une submersion riemannienne au-dessus de $\mathbb{C}P(2)$ muni de la métrique standard si et seulement si deux paramètres, supposons r et s, sont égaux à 1. Alors $\mathfrak{n}$ est l'espace tangent à la fibre en l'origine et (24) exprime que les fibres sont totalement géodésiques. Puisqu'il s'agit de la fibration d'un espace de twisteur au-dessus d'une variété d'Einstein auto-duale de courbure scalaire égale à 24, le théorème de Hitchin ([10]) ou Friedrich ([4]) dit que $(F(1,2), g)$ est kählerienne si et seulement si le troisième paramètre t vaut 2. De plus par un autre théorème de Friedrich dans [5]

Theorème 5.2. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne de dimension 4. Si son espace de twisteurs $Z \xrightarrow{\pi} M$, muni de la métrique $\pi^*g + tds^2$, où ds^2 est la métrique standard de $\mathbb{C}P(1)$, est d'Einstein pour un certain $t > 0$, alors (M^4, g) est auto-duale, d'Einstein, à courbure scalaire strictement positive R, et t vaut $\frac{48}{R}$ ou $\frac{24}{R}$.*

elle est d'Einstein si et seulement si $t = 1$ ou $t = 2$. Dans le premier cas elle est donc Kähler-Einstein, dans le second il s'avère (voir [2], p145) qu'elle est strictement NK. Comme en dimension 6 une variété NK est kählerienne ou d'Einstein ([6]), les seules possibilités que la variété soit NK dans le cas où deux paramètres sont égaux, par exemple $r = s$, sont finalement $t = 2r = 2s$ et $t = r = s$.

A cause de (23), (24), (25), on cherche une application $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{k})$, représentant la connexion de Levi-Civitá de g, de la forme

$$\begin{aligned} \Lambda(X)U &= \alpha[X,U] \\ \Lambda(U)A &= \beta[U,A] \\ \Lambda(A)X &= \gamma[A,X] \\ \Lambda(X)Y &= \Lambda(U)V = \Lambda(A)B = 0 \end{aligned}$$

où $X, Y \in \mathfrak{l}$, $U, V \in \mathfrak{m}$ et $A, B \in \mathfrak{n}$. Par (2) on a alors

$$\begin{aligned} \Lambda(U)X &= (1-\alpha)[U,X] \\ \Lambda(A)U &= (1-\beta)[A,U] \\ \Lambda(X)A &= (1-\gamma)[X,A] \end{aligned}$$

En prenant dans (1) $X \in \mathfrak{l}, Y \in \mathfrak{m}, Z \in \mathfrak{n}$ puis en permutant circulairement on obtient les conditions, d'ailleurs suffisantes

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha t &= (1-\gamma)s \\ \beta r &= (1-\alpha)t \\ \gamma s &= (1-\beta)r \end{aligned} \right.$$

Lemme 5.3. *Les seules structures presque complexes invariantes de l'espace des drapeaux, compatibles avec g, sont celles représentées par la multiplication par $\pm i$ de chacun des trois nombres complexes intervenant dans l'écriture des matrices de $\mathfrak{k}$.*

Démonstration. On note de la même façon J une structure presque complexe invariante de $F(1,2)$ ou l'endomorphisme de carré -1 de $\mathfrak{k}$ qui la représente. Si on note

$$\forall\, a \in \mathbb{C}, \quad J\langle a,0,0\rangle = \langle a', b', c'\rangle$$

$$Ad_h J\langle a,0,0\rangle = \langle e^{i(t-s)}a', e^{i(t-r)}b', e^{i(s-r)}c'\rangle \quad \text{pour } h = \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \in H$$

Dans l'autre sens

$$Ad_h\langle a,0,0\rangle = \langle e^{i(t-s)}a, 0, 0\rangle$$

On choisit de faire $s = t$. Alors il faut quels que soient r et s

$$\langle a', b', c'\rangle = J Ad_h\langle a,0,0\rangle = Ad_h J\langle a,0,0\rangle = \langle a', e^{i(s-r)}b', e^{i(s-r)}c'\rangle$$

car l'égalité centrale doit être vraie quel que soit $h \in H$. La seule solution est que $b' = c' = 0$ quel que soit $a \in \mathbb{C}$. On procède de la même manière pour les deux autres sous-espaces et on trouve que J préserve $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Sur ces sous-espaces de dimension 2, ce ne peut-être que la rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ par rapport à $(.|.)|_{\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}}$, $(.|.)|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ ou $(.|.)|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$. $\square$

On note dans la suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les nombres, égaux à ± 1, tels que

$$J\langle a,b,c\rangle = \langle \epsilon_1 a, -\epsilon_2 b, e_3 c\rangle$$

Puisqu'on connait la connexion de Levi-Civitá ∇ on peut calculer ∇J. En exprimant qu'il doit être antisymétrique :

$$(\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X$$

on obtient des conditions sur $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ et α, β, γ. Les trois sous-espaces étant préservés par J, $(\nabla_X J)Y = 0$ dès que X, Y appartiennent au même. Les autres cas donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha(\epsilon_2+\epsilon_3) & = & (1-\alpha)(\epsilon_1+\epsilon_3) \\ \beta(\epsilon_1+\epsilon_3) & = & (1-\beta)(\epsilon_1+\epsilon_2) \\ \gamma(\epsilon_1+\epsilon_2) & = & (1-\alpha)(\epsilon_2+\epsilon_3) \end{array}\right. \tag{27}$$

Si les trois signes sont égaux $\alpha = 1-\alpha$, c'est à dire $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$. En reportant dans (26) on trouve $r = s = t$, c'est à dire que g est un multiple strictement positif de la métrique NK connue. S'il y a deux signes distincts en revanche toutes les lignes de (27) sont nulles c'est à dire $\nabla J = 0$ et selon desquels il s'agit un paramètre dans l'écriture de la métrique est égal à la somme des deux autres. On appelle ces métriques $g_{\lambda,\mu}$ (quand α est nul : les coefficients de la métrique sont alors $s = \lambda$, $t = \mu$ et $r = \lambda+\mu$), $g'_{\lambda,\mu}$ (lorsque $\beta = 0$) et $g''_{\lambda,\mu}$ ($\gamma = 0$), pour chaque couple de nombres (λ, μ) strictement positifs. On a démontré la

Proposition 5.4. *L'espace des drapeaux peut-être muni d'une seule métrique strictement NK homogène, trois-symétrique, à un changement d'échelle près, et des seules métriques kähleriennes homogènes $g_{\lambda,\mu}$, $g'_{\lambda,\mu}$ et $g''_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu \in]0; +\infty[$. Ces dernières, lorsque $\lambda = \mu$, correspondent, à un changement d'échelle près, à la métrique kählerienne naturelle de l'espace de twisteur de $\mathbb{C}P(2)$, la fibration étant réalisée de trois façons différentes à partir de $F(1,2)$.*

6. L'espace projectif complexe de dimension 3

Dans cette section $\mathfrak{h} = i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2)$, l'algèbre de Lie de $Sp(2)$.

Lemme 6.1. *Il y a un seul plongement possible, à conjugaison près, de* $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$ *dans* $\mathfrak{sp}(2)$*, donné par la composition des plongements naturels* $i\mathbb{R} \hookrightarrow \mathfrak{sp}(1)$ *et* $\mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sp}(1)$ *et du plongement diagonal* $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \hookrightarrow \mathfrak{sp}(2)$.

Démonstration. On cherche les plongements $j : i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{sp}(2)$. On considère la représentation complexe ρ de dimension 4 induite par la restriction de j à $\mathfrak{su}(2)$. Elle commute à tout élément X de l'image de $i\mathbb{R}$. Comme tout endomorphisme de $\mathfrak{sp}(2)$, on peut voir X comme un endomorphisme complexe via l'inclusion $\mathfrak{sp}(2) \subset \mathfrak{su}(4)$. Il est alors diagonalisable et son spectre est de la forme $\{\lambda i, \mu i, -\lambda i, -\mu i\}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ car quel que soit le vecteur propre u de X, ju est un vecteur propre pour la valeur propre opposée. Si $\lambda = \mu$, c'est à dire X est la multiplication dans $\mathbb{H}^2$ par un nombre imaginaire pur, ρ est la somme directe de deux représentations irréductibles de dimension 2, nécéssairement conjuguées. Cependant j n'est alors pas un plongement, son image étant isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$. Par conséquent $\lambda \neq \mu$ et on doit nécéssairement avoir λ ou $\mu = 0$ sinon ρ préserverait les 4 sous-espaces propres de dimension 1, c'est à dire serait triviale. Comme la somme des sous-espaces propres de λ et $-\lambda$ est stable par la multiplication par i, j, k, ce cas est exactement celui décrit dans l'énoncé du lemme. □

Dans le cas de groupes simples, l'espace homogène obtenu est $Sp(2)/S^1 \times SU(2)$, isomorphe à $\mathbb{C}P(3)$.

En général $\mathbb{C}P(2n-1)$ est isomorphe à $Sp(n)/S^1 \times Sp(n-1)$. En effet le groupe $Sp(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{C}^{2n}$, identifié à $\mathbb{H}^n$, en préservant les droites complexes et le groupe d'isotropie en $u \in \mathbb{C}P(2n-1)$ de l'action induite est constitué d'endomorphismes qui préservent non seulement u mais ju et agissent comme $Sp(n-1)$ sur l'orthogonal, vu comme $\mathbb{H}^{n-1}$. Pour $n = 2$, $Sp(2) \simeq Spin(5)$ agit transitivement sur la sphère S^4 par l'intermédiaire de $SO(5)$ et le groupe d'isotropie est l'image réciproque, par le revêtement à 2 feuillets $\pi : Spin(5) \to SO(5)$, de $SO(4)$ i.e. $Spin(4)$. Par conséquent $S^4 \simeq Sp(2)/Spin(4)$ et on définit une fibration $\mathbb{C}P(3) \to S^4$ par le plongement naturel $S^1 \times Sp(1) \hookrightarrow Sp(1) \times Sp(1) \simeq Spin(4)$. C'est en fait la fibration de l'espace de twisteurs de S^4 comme expliqué dans [15] p45

Dès lors si on décompose l'algèbre de Lie de $Sp(2)$ en $\mathfrak{sp}(5) = \mathfrak{spin}(4) \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ est identifié à l'espace tangent à l'origine de S^4. L'espace tangent à l'origine de $\mathbb{C}P(3)$ est lui identifié à $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n}$ est un supplémentaire de $i\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{su}(2)$ si bien que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, $\mathfrak{spin}(4)$ étant isomorphe à $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$.

Explicitement, on note $a \mapsto a^*$, $a \in \mathbb{H}$ la conjugaison quaternionique (soit pour $u, v \in \mathbb{C}$, $u + jv \mapsto \overline{u} - jv$). On représente habituellement $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2)$ dans l'espace des matrices carrées 2×2 à coefficients quaternioniques et on pose

$$\mathfrak{m} = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{H}\}$$

$$\mathfrak{n} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a = jx + ky,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Leur somme $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{h}$. Bien plus, chacun de ces sous-espaces est préservé par $Ad(H)$. Un élément $h \in H$ représenté par $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $u \in Sp(1)$ agit par l'action adjointe comme

$$Ad_h \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta}ab \\ b^*a^*e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

sur les éléments de $\mathfrak{m}$ et

$$Ad_h \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\theta}a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $\mathfrak{n}$. Les deux représentations de H ainsi décrites sont irréductibles, la première, de dimension 4, a fortiori car les représentations de $Sp(1)$ données par la multiplication à droite ou à gauche dans $\mathbb{H}$ le sont. Par conséquent $Ad(H)\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition irréductible. L'espace des métriques homogènes est de dimension 2 et si on s'autorise un changement d'échelle elles ne sont plus décrites que par un seul paramètre, la courbure scalaire de la fibre, isomorphe à $\mathbb{C}P(1)$, de la fibration riemannienne $\mathbb{C}P(3) \to S^4$. Autrement dit ce sont les multiples strictement positifs des métriques twistorielles au dessus de S^4, munie de sa métrique standard. Plus précisément, avec le produit scalaire sur $\mathfrak{k}$ donné par $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} Re(tr(XY))$ soit par

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \rangle = Re(ab^*), \quad \langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{2} Re(ab^*)$$

et $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont orthogonaux, les métriques twistorielles sont les métriques invariantes g_t valant $\langle ., . \rangle|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}} + t\langle ., . \rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$ sur $T_oM \simeq \mathfrak{k}$. En effet on a vu que $\mathfrak{m}$ est identifié à $T_o(S^4)$. C'est lui qui reçoit la métrique de la base S^4.

Finalement, à cause des mêmes théorèmes de Friedrich et Hitchin sur les espaces de twisteurs en dimension 6 cités à la section précédente

Proposition 6.2. *Dans la famille $(g_t)_{t>0}$ de métriques homogènes de $\mathbb{C}P(3) = Sp(2)/S^1 \times Sp(1)$, seules g_1, strictement NK 3-symétrique, et g_2, Kähler-Einstein, sont des métriques NK. Toutes les métriques NK homogènes sur $\mathbb{C}P(3)$ sont des multiples de celles-ci.*

7. La sphère de dimension six

Il y a un seul espace homogène $M = G_2/SU(3)$ – c'est à dire un seul sous-groupe de G_2 à conjugaison près isomorphe à $SU(3)$ – car les deux groupes sont de même rang. Il est isomorphe à la sphère de dimension 6. On peut construire une structure NK 3-symétrique sur M en prenant comme dans [15] sur l'espace tangent l'unique métrique, à un multiple près, et l'unique structure presque complexe préservées par le groupe d'isotropie. En effet $SU(3)$ n'admet pas de représentation autre que triviale avant la dimension 6, $G_2/SU(3)$ est donc à isotropie irréductible. On a par conséquent

Proposition 7.1. *La sphère S^6, vue comme l'espace homogène $G_2/SU(3)$, admet une seule structure presque hermitienne invariante à homotétie près. Elle est NK, 3-symétrique.*

En revanche la variété S^6, munie de sa métrique ronde g, a une infinité de structures presque complexes NK. Elles sont toutes invariantes sous l'action d'un sous-groupe différent, isomorphe à G_2, du groupe d'isométries $SO(7)$ c'est à dire correspondent chacune à une façon différente de réaliser S^6 comme l'espace homogène presque hermitien $G_2/SU(3)$. En effet contrairement à ce qui se passe pour les autres variétés NK comme $F(1,2)$, $\mathbb{C}P(3)$, $S^3 \times S^3$, il n'y a pas ici une seule droite de spineurs de Killing qui permettrait de définir l'unique structure presque complexe compatible avec g rendant la variété NK (voir proposition 2.4). Cependant, soit une variété riemannienne (M,g), C. Bär a montré, dans le cadre d'une explication générale [1] à la fois de la théorie des spineurs de Killing et de l'holonomie spéciale, que la donnée d'une structure presque complexe J sur M telle que (M,g,J) soit NK est équivalente à la donnée sur son cône riemannien d'une 3-forme générique parallèle α (i.e. il est à holonomie contenue dans G_2). La correspondance est donnée par

$$\alpha = t^2 dt \wedge \omega + t^3 d\omega \tag{28}$$

où ω est la forme de Kähler. Ici le cône est simplement l'espace plat de dimension 7 et la forme parallèle est constante. Il y a donc une injection de l'espace des structures presque complexes NK de (S^6, g) dans l'espace des 3-formes génériques en dimension 7, ouvert dans $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)$ (voir [3]).

La dérivée covariante pour la connexion de Levi-Civitá et la différentielle extérieure de la forme de Kähler d'une variété NK sont proportionnelles : $d\omega = 3\nabla\omega$. Les variétés SNK de dimension 6 vérifient en outre, pour tous champs de vecteurs X, Y :

$$\|(\nabla_X J)Y\|^2 = \alpha\left(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2 - g(JX,Y)^2\right) \tag{29}$$

où α est un nombre réel strictement positif relié à la courbure scalaire par $s = 30\alpha$. La variété NK est alors dite « de type constant α » (cf [7]). Si on fixe la métrique standard sur la sphère, de courbure scalaire $s = 30$, et la norme standard de l'espace des 3-formes associée à cette métrique, α vaut 1 quelle que soit la structure presque complexe NK et la norme de $d\omega$ par conséquent vaut toujours 6 par (29).

Alors, on se donne un endomorphisme J de carré -1 d'un espace tangent en $x \in S^6$ tel que $g_x(JX, JY) = g_x(X,Y)$, ou de façon équivalente la 2-forme ω_x, et une 3-forme ρ appartenant à la sphère de dimension 1, de rayon 6 de l'espace des 3-formes de type (3,0)+(0,3) de T_xS^6. La 3-forme constante α sur $\mathbb{R}^7$ donnée par $\alpha_x = dt \wedge \omega_x + \rho$ permet une réduction à G_2 de l'holonomie du cône, ce qui prouve réciproquement que

$$\omega = \frac{1}{t^2}\iota(dt)\alpha$$

est la 2-forme de Kähler d'une structure NK sur S^6 avec $\rho = (d\omega)_x$.

Proposition 7.2. *L'ensemble $\mathcal{J}$ des structures presque complexes NK de la sphère S^6 est isomorphe à $\mathbb{R}P(7)$.*

Démonstration. Le groupe d'isométries SO(7) agit transitivement sur les structures presque complexes NK par

$$\begin{array}{rcl} SO(S^6) \times \mathcal{J} & \to & \mathcal{J} \\ (f, J) & \mapsto & f.J \end{array}$$

où $\forall\, x \in M$

$$(f.J)_x = (f_*)_x J_x (f_*)_x^{-1}$$

Le groupe d'isotropie est isomorphe à G_2 car si $f \in SO(7)$ préserve ω, il préserve aussi α, définie par (28). Par conséquent $\mathcal{J}$ est isomorphe à $SO(7)/G_2 \simeq \mathbb{R}P(7)$. $\square$

Ceci achève la classification des variétés NK homogènes simplement connexes de dimension 6. En passant on a démontré la conjecture 2.3 en dimension 6 et d'après Nagy [14], en toute dimension. Les résultats sont résumés dans les théorèmes 1.1 et 1.2.

Références

[1] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy,* Commun. Math. Phys. **154**, 509–521 (1993)

[2] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds,* Teubner–Verlag, Stuttgart/Leipzig (1991)

[3] R. L. Bryant, *Metrics with special holonomy,* Ann. Math. **126**, 525–576 (1987)

[4] Th Friedrich, H. Kurke, *Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature,* Math. Nachr. **106**, 271–299 (1982)

[5] Th. Friedrich, R. Grunewald, *On Einstein metrics on the twistor space of a four-dimensional Riemannian manifold,* Math. Nachr. **123**, 55–60 (1985)

[6] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3,* J. Diff. Geom. **7**, 343–369 (1972)

[7] A. Gray, *The structure of nearly Kähler manifolds,* Math. Ann. **223**, 233–248 (1976)

[8] A. Gray, L.M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants,* Ann. Mat. Pura Appl. **123**, 35–58 (1980)

[9] R. Grunewald, *Six-dimensional Riemannian manifold with real Killing spinors,* Ann. Global Anal. Geom. **8**, 43–59 (1990)

[10] N. Hitchin, *Kählerian twistor spaces,* Proc. Lond. Math. Soc. (3) **43**, 133–150 (1981)

[11] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Wiley Interscience, New York, vol. 2 (1963)

[12] A.J. Ledger, M. Obata, *Affine and Riemannian s-manifolds,* J. Diff. Geom. **2**, 451–459 (1968)

[13] P.A. Nagy, *On nearly Kähler geometry,* Ann. Global Anal. Geom **22**, 167–178 (2002)

[14] P.A. Nagy, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations,* Asian J. Math. **6**, 481–504 (2002)

[15] R. Reyes Carrión, *Some special geometries defined by Lie groups,* Ph.D. thesis, Oxford (1993)

[16] J.A. Wolf, A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I, II,* J. Diff. Geom. **2**, 77–114, 115–159 (1968)